Grupos, Topología en Dimensiones Bajas y Curvatura no Positiva

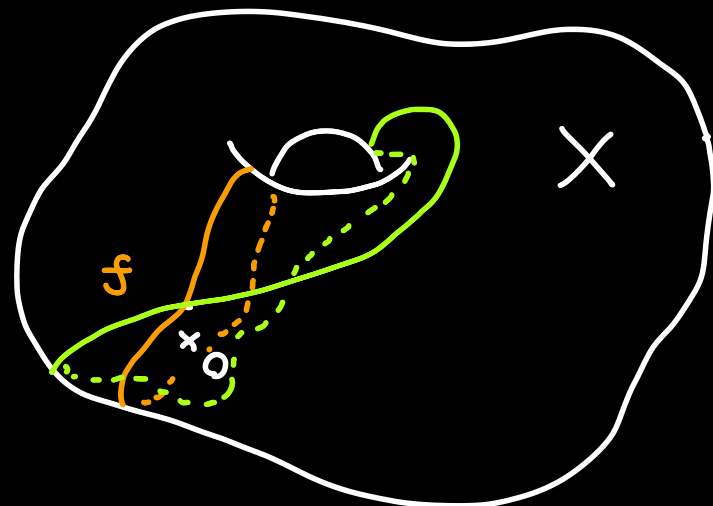
Eduardo Reyes
UC Berkeley

Coloquio Las Palmeras

Junio 7
2023

GRUPO FUNDAMENTAL

X espacio topológico arcoconexo, $x_0 \in X$



DEFINICIÓN:

* Loops: $f: [0,1] \longrightarrow X$ continua tq $f(0) = f(1) = x_0$.
* $f \sim g$: $\exists\ F: [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ continua tq
  i) $F(u,0) = f(u)$, $F(u,1) = g(u)$
  ii) $F(0,t) = F(1,t) = x_0$

* GRUPO FUNDAMENTAL $\pi_1(X) \simeq \pi_1(X, x_0) := \{\text{Loops}\}/\sim$
* Concatenar: f, g loops $\rightsquigarrow$ $f * g: [0,1] \longrightarrow X$ $\quad u \longmapsto \begin{cases} f(2u) & u \leq 1/2 \\ g(2u-1) & u \geq 1/2 \end{cases}$

$\pi_1(X)$ ES GRUPO! $\quad [f] * [g] := [f * g]$

Ejemplos

* $\pi_1(\mathbb{R}^n) \simeq \{1\}$
* $\pi_1(S^n) \simeq \{1\}$ $\quad n \geq 2$
* $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z} = \langle [0,1] \to S^1 \mid u \mapsto e^{i2\pi u} \rangle$
* $\pi_1(X \times Y) \simeq \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$
* $\pi_1(\infty) \simeq F_2$
  grupo libre
* $\pi_1(\mathbb{RP}^n) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

PROPIEDAD: $X \xrightarrow{A} Y$ continua induce $\pi_1(X) \xrightarrow{A_*} \pi_1(Y)$

$$[f] \longmapsto [A \circ f]$$

$\therefore$ X, Y homotópico equivalentes $\implies$ $\pi_1(X) \simeq \pi_1(Y)$

Qué tan buen invariante es π_1?

Functor $\pi_1 : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Grp}$

* No injectivo: $\pi_1(X) \simeq \pi_1(X \times \mathbb{S}^n)$ $\forall$ $n \geq 2$

* Sobrejectivo: $\forall$ grupo Γ $\exists$ CW complejo X tq $\pi_1(X) \simeq \Gamma$
  (se puede elegir X con cubrimiento universal contractible)

* Qué tanto sabemos de **Grp**?

Teorema (Adian'55, Rabin'58): $\nexists$ algoritmo con input una presentación finita $\Gamma = \langle S \mid R \rangle$ y decida si $\Gamma \simeq \{1\}$

"Solución": restringir a una subclase de **Top**

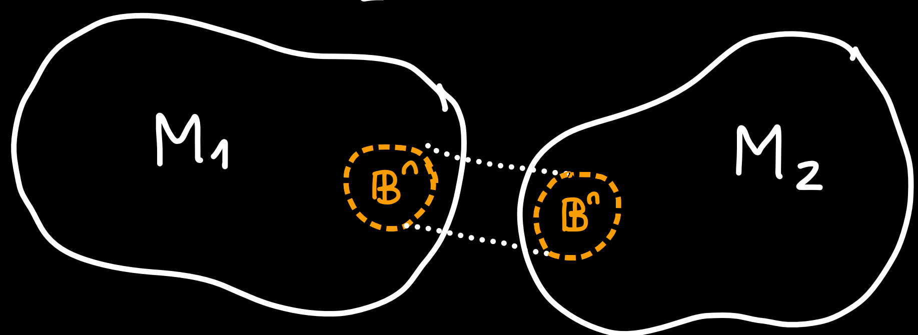
Variedades Topológicas

Definición: M es **n-variedad** si $\forall\ x \in M\ \exists$ abierto $U \ni x$ homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ y adicionalmente

* M es Hausdorff
* M es 2nda contable

Ejemplos: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_-$ cerrado, $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{T}^n := \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$, $\mathbb{RP}^n$, $\mathbb{CP}^n$

Suma conexa: $M_1 \# M_2$ $\qquad \pi_1(M_1 \# M_2) \simeq \underbrace{\pi_1(M_1) * \pi_1(M_2)}_{\text{producto libre}}$



Hoy: pedimos M **conexa**, **orientable**, **cerrada** (compacta sin borde)

Dimensiones muy bajas

* $n=0$ $M=\{pt\}$ $\pi_1 \simeq \{1\}$
* $n=1$ $M \simeq \mathbb{S}^1$ $\pi_1 \simeq \mathbb{Z}$

Dimensión 2

* $M \simeq \mathbb{S}^2$ (esfera)
* $M \simeq \mathbb{T}^2 := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ (toro)
* $M \simeq \Sigma_g = \underbrace{\mathbb{T}^2 \# \cdots\cdots \# \mathbb{T}^2}_{g \text{ veces}}$ $g \geq 2$

Σ_3

$$\pi_1(\Sigma_g) \simeq \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots\cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \rangle$$

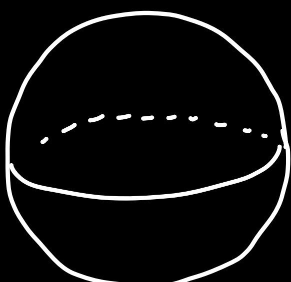
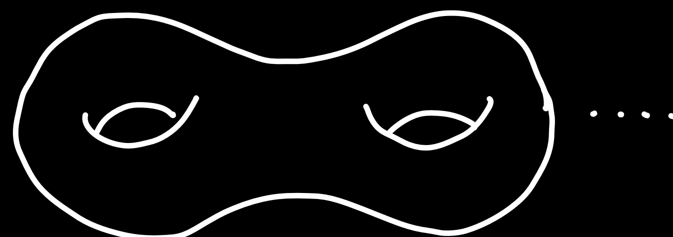
Truco: Encontrar γ curva cerrada simple **esencial**

$([\gamma] \neq 1 \in \pi_1(\Sigma))$

UNIFORMIZACIÓN (dimensión 2)

TEOREMA (Poincaré, Koebe '1907):

Σ 2-variedad cerrada orientable $\Longrightarrow$ $\exists$ métrica Riemanniana de curvatura seccional constante

$\boxed{>0}$	$\boxed{=0}$	$\boxed{<0}$
$\mathbb{S}^2$	$\mathbb{T}^2$	$\Sigma_g,\ g \geq 2$
		
$=$	$=$	$=$
$\mathbb{CP}^1$	$\Gamma \backslash \mathbb{C}$	$\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$
		plano hiperbólico

Dimensión 4

Proposición: Γ grupo finitamente generado

$\Rightarrow \exists\ M$ 4-variedad cerrada (conexa, compacta, sin borde)

puede ser simpléctica

tq $\pi_1(M) \simeq \Gamma$

$\exists\ \infty$ 4-variedades cerradas M con $\pi_1(M) \simeq \{1\}$

Freedman (1982): Clasificadas por numero de intersección en $H_2(M;\mathbb{Z})$ (matriz entera invertible)

$$\mathbb{S}^4,\ \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2,\ \mathbb{CP}^2,\ \overline{\mathbb{CP}^2},\ E_8,\ \ldots$$

Corolario: M^4 cerrada y homotópica equivalente a $\mathbb{S}^4$

$\Rightarrow\ M \simeq \mathbb{S}^4$

Dimensión 3

Ejemplos: $\mathbb{RP}^3, \mathbb{S}^3, \mathbb{T}^3, \mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^1\times\Sigma_g, \mathbb{T}^3\#(\mathbb{S}^1\times\Sigma_g), \dots$

Espacios de Lens

$$\mathbb{S}^3 = \{(z,w) \mid |z|^2+|w|^2=1\} \subset \mathbb{C}^2 \qquad (p,q)=1$$

$$L(p,q) := \mathbb{S}^3 \big/ (z,w)\sim\left(e^{\frac{2\pi i}{p}}z, e^{\frac{2\pi q i}{p}}w\right) \qquad \pi_1(L(p,q)) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} L(p,q) \simeq L(p,q') \\ \text{ssi } q \equiv \pm (q')^{\pm 1} \pmod p \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c} L(p,q) \underset{h.e.}{\simeq} L(p,q') \\ \text{ssi } qq' \equiv \pm n^2 \pmod p \end{array}}$$

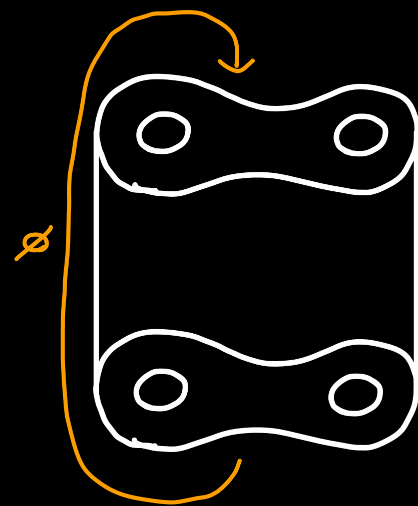
Mapping Torus

$\Sigma_g \xrightarrow{\phi} \Sigma_g$ homeomorfismo $g \geq 1$

$$M_\phi := \Sigma_g \times [0,1] \big/ (x,0)\sim(\phi(x),1)$$

$\exists$ secuencia exacta corta

$$\boxed{1 \to \pi_1(\Sigma_g) \to \pi_1(M_\phi) \to \mathbb{Z} \to 1}$$



$\Sigma_g \rtimes_\phi \mathbb{S}^1$

Complementos de Nudos

Nudo: $K(\simeq \mathbb{S}^1) \subset \mathbb{S}^3$ $\qquad M = M(K) := \mathbb{S}^3 \setminus \nu(K)$

3-variedad con borde $\simeq \mathbb{T}^2$

Trefoil

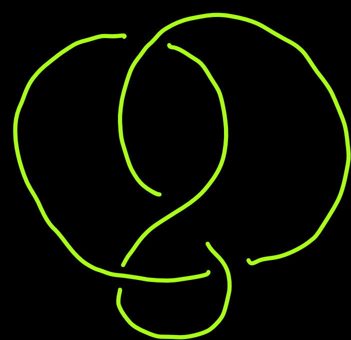
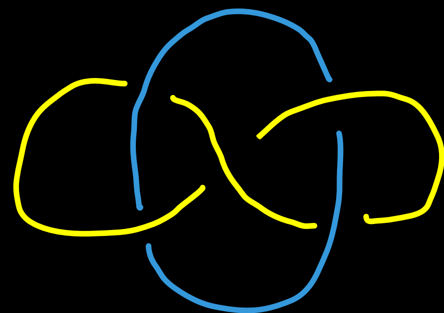
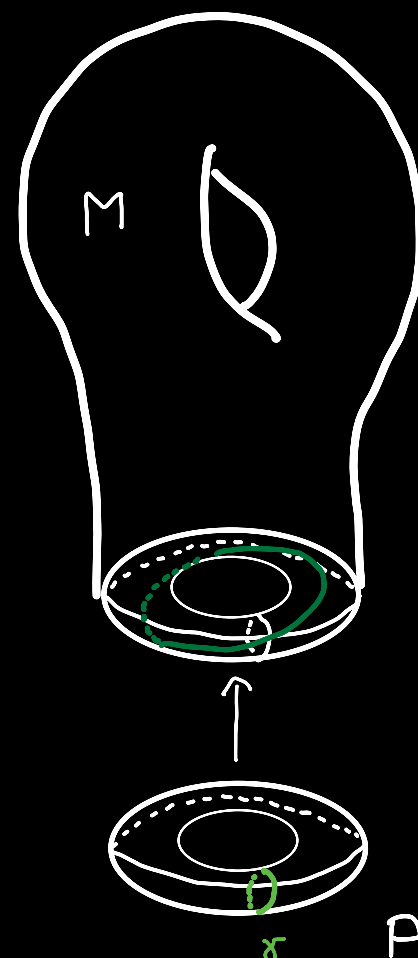


Figura 8



Link de Whitehead



Teorema (Gordon-Luecke '89):

$K_1 \sim K_2$ ssi $M(K_1) \simeq M(K_2)$

ssi $\pi_1(M(K_1)) \simeq \pi_1(M(K_2))$

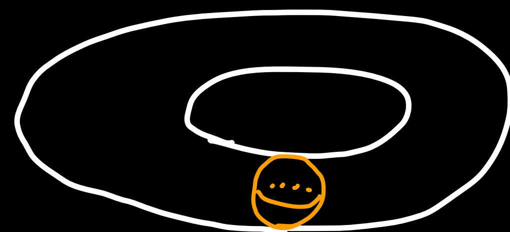
Cirugía de Dehn: pegar $M(K)$ y un toro sólido P a través de $\partial M(K) \simeq \partial P \simeq \mathbb{T}^2$

Descomposición en Irreducibles

Definición: M^3 **irreducible** si toda 2-esfera $\mathbb{S}^2 \subset M$ es borde de una 3-bola $\mathbb{B}^3 \subset M$

Ejemplo: * $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}^3$, $M(K)$ $\forall K$ nudo/ Link irreducibles

* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ no irreducible



$\{0\} \times \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$

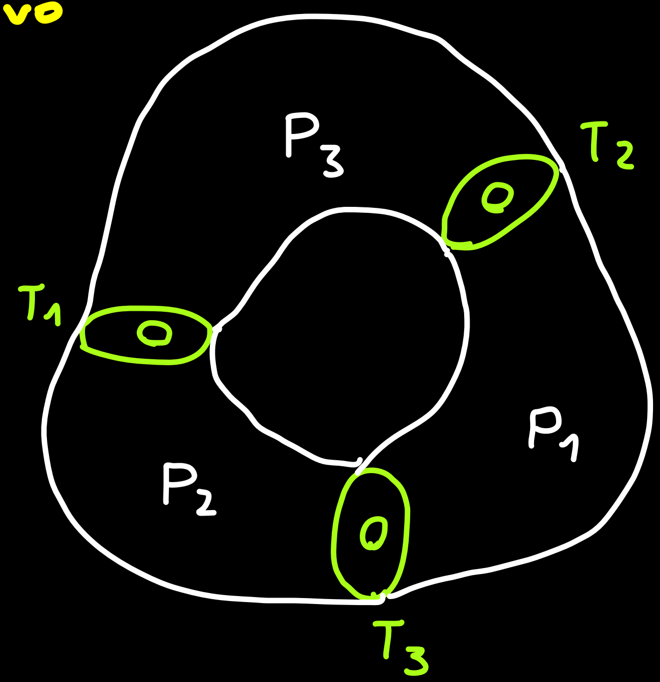
Teorema (Kneser-Milnor '29-'62):
M^3 cerrada orientable $\Rightarrow \exists!$ $M_1, \dots, M_k$ irreducibles orientables + $r \geq 0$ s.t

$$M \simeq M_1 \# M_2 \# \cdots \# M_k \# \#^r(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi_1(M) \simeq \pi_1(M_1) * \cdots * \pi_1(M_k) * \mathbb{Z}^r}$$

DESCOMPOSICIÓN JSJ

DEFINICIÓN: $Y \overset{i}{\subset} X$ es **π_1-injectivo** si $\pi_1(Y) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X)$ es injectivo



TEOREMA (Jaco-Shalen, Johannson '79):
M^3 cerrada irreducible orientable
$\Rightarrow \exists!$ colección maximal de toros π_1-injectivos disjuntos $T_1, \dots, T_k \, (\simeq \mathbb{T}^2) \hookrightarrow M$

DESCOMPOSICION JSJ: componentes de $M^3 \setminus\setminus (T_1 \cup \cdots \cup T_k)$
3-variedades cerradas (si no T_i's)
o con borde unión de $\mathbb{T}^2$'s (si algún T_i)

Geometrización

Definición: M^3 (quizás con borde) es **geométrica** si $\exists$ métrica Riemanniana en $\mathring{M}^3 = M \setminus \partial M$ que es completa, de volumen finito, y **localmente homogénea** (todo par de puntos tiene vecindades isométricas)

Teorema (Thurston-Perelman '03): M^3 cerrada, orientable, irreducible, $T_1, \dots, T_k \subset M^3$ toros π_1-injectivos maximales.

$$M^3 \setminus\!\setminus (T_1 \cup \cdots \cup T_k) = P_1 \sqcup \cdots \sqcup P_\ell$$

$$\Rightarrow \text{cada } P_i \text{ es geométrica}$$

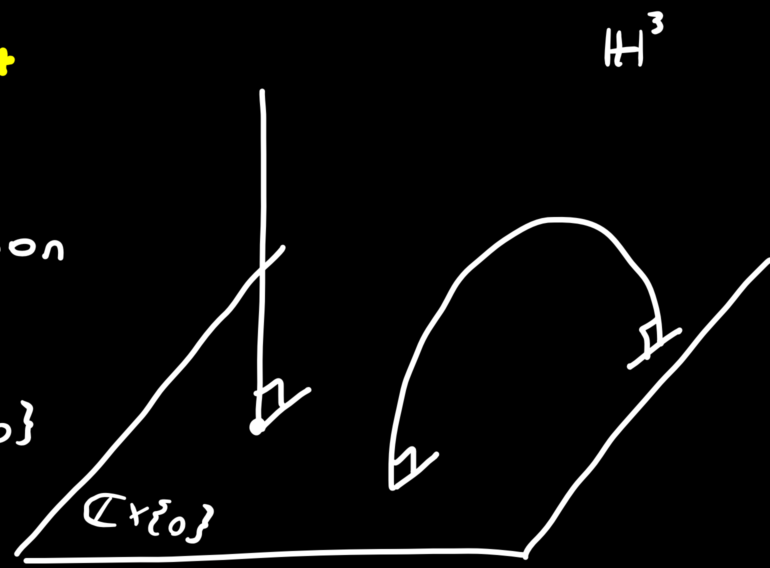
Topología implica geometría

Las 8 geometrías

Geometría	Ejemplo	π_1	Ejemplo π_1	
$\mathbb{S}^3$	$L(p,q)$	finito	$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$	
$\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}$	$\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1$	infinito, virt. cíclico	$\mathbb{Z}$	
$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{T}^3$	virt. abeliano, no virt. cíclico	$\mathbb{Z}^3$	
Nil	$\mathbb{T}^2\rtimes\mathbb{S}^1$ Dehn twist	virt. nilpotente, no virt. abeliano	$\left\{\begin{pmatrix}1 & \mathbb{Z} & \mathbb{Z}\\ 0 & 1 & \mathbb{Z}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$	Seifert fibered
Sol	$\mathbb{T}^2\rtimes\mathbb{S}^1$ Anosov	virt. soluble, no virt. nilpotente	$\mathbb{Z}^2\rtimes\mathbb{Z}$	
$\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$	$\Sigma_g\times\mathbb{S}^1$ $g\geq 2$	$\exists$ subgrupo normal cíclico infinito, no virt. soluble	$\pi_1(\Sigma_g)\times\mathbb{Z}$	
$\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$	$T^1\Sigma_g$		$\pi_1(\Sigma_g)\rtimes\mathbb{Z}$	
$\mathbb{H}^3$	$\Sigma_g\rtimes\mathbb{S}^1$ p. Anosov	$\nexists$ subgrupo normal cíclico infinito, no virt. soluble	$\pi_1(\Sigma_g)\rtimes\mathbb{Z}$!!!!	

Geometría Hiperbólica

$$\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$$



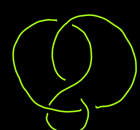
$\exists$ métrica en $\mathbb{H}^3$ tal que geodésicas son

* rayos verticales,
* semicircunferencias ortogonales a $\mathbb{C}\times\{0\}$

$$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3) \simeq PSL(2,\mathbb{C})$$

$\therefore$ M^3 hiperbolica ssi $M \simeq \Gamma \backslash \mathbb{H}^3$ $\Rightarrow \pi_1(M) \simeq \Gamma$
con $\Gamma < PSL(2,\mathbb{C})$ subgrupo discreto

Ejemplo (aritméticas): $\mathcal{O}_d \subset \mathbb{C}$ anillo de enteros de $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$
$\Rightarrow \Gamma = PSL(2,\mathcal{O}_d)$ discreto y $\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathbb{H}^3) < \infty$

Ejemplo: $\mathbb{S}^3 \backslash$ 

Teorema (Thurston '88): $\Sigma_g \xrightarrow{\varphi} \Sigma_g$ homeo pseudo-Anosov

y $g \geq 2$ $\Longrightarrow$ M_φ hiperbólica

Cómo entender 3-variedades hiperbólicas???

Idea (Haken): Cortar M^3 a través de superficies

embedidas π_1-injectivas

Peligro: $\exists$ M^3 hiperbólicas sin superficies

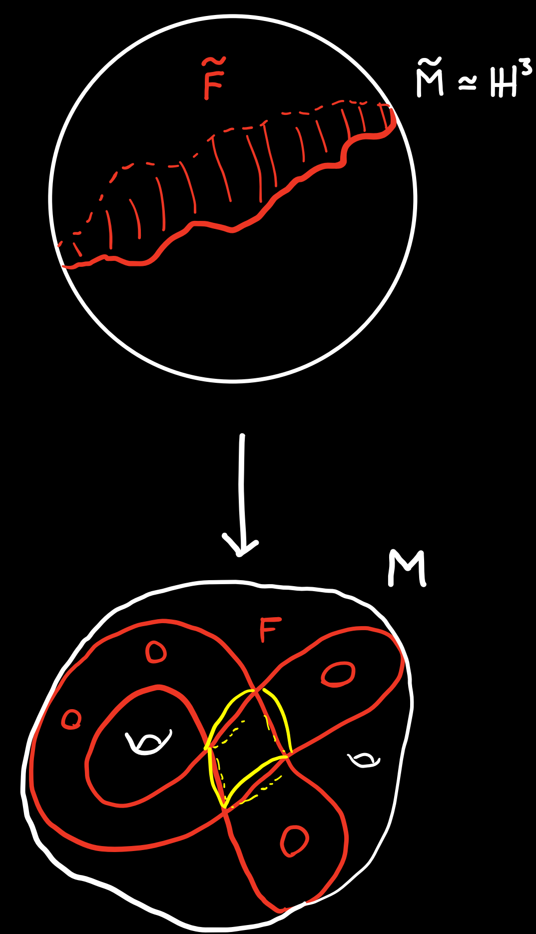
embedidas π_1-injectivas

Teorema (Kahn-Markovic '09):

M^3 cerrada hiperbólica $\Rightarrow$ hay "muchas"

subsuperficies "casi totalmente geodésicas" immersas

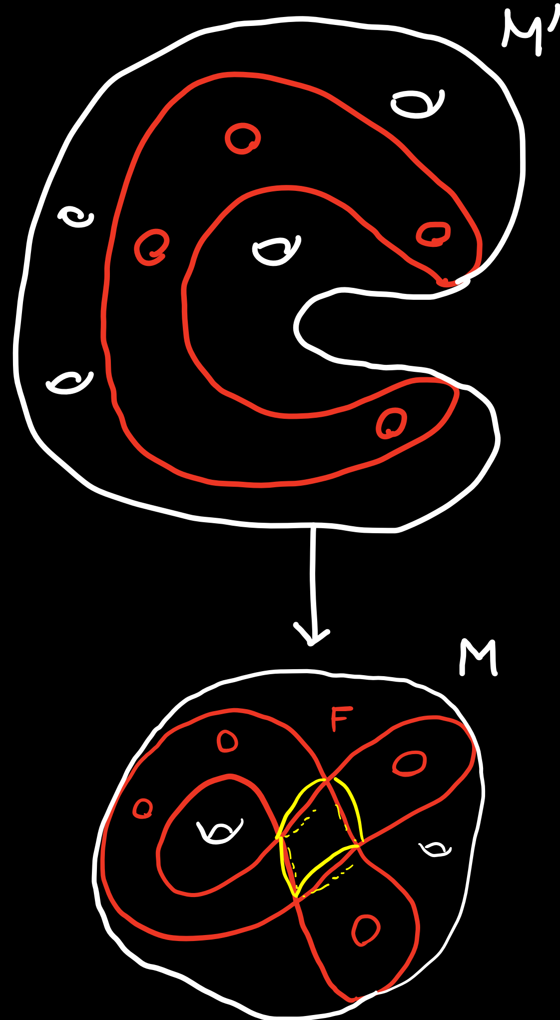
$F^2 \looparrowright M$



COROLARIO: $\Gamma \simeq \pi_1(M^3$ cerrada hiperbólica$)$

$\Rightarrow \Gamma$ contiene muchos subgrupos de superficie quasiconvexos

"NUEVA" IDEA (Waldhausen'68): Encontrar cubrimiento finito $M' \to M$ con superficies embedidas π_1-injectivas



DEFINICIÓN: $H < \Gamma$ es subgrupo **separable** si H es intersección de subrupos de Γ con índice finito

EJEMPLO: $\{1\} < SL(d, \mathbb{Z})$ separable

$$\{1\} = \bigcap_p \ker\{SL(d,\mathbb{Z}) \to SL(d, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\}$$

TEOREMA (Malceev '40): $\Gamma < SL(d, \mathbb{C})$ finitamente generado $\Rightarrow \{1\} < \Gamma$ separable.

CRITERIO (Scott '78): $Y \hookrightarrow X$ (CW complejos) π_1-injectiva, $H = \pi_1(Y) < \pi_1(X) = \Gamma$

Son equivalentes:

1. $H < \Gamma$ separable
2. H cerrado en la topología profinita de Γ
3. $\forall K \subset Y$ compacto $\exists X_H \to \hat{X} \to X$ cubrimiento finito y levantamiento $Y \longrightarrow \hat{X}$ que es injectivo en K.

TEOREMA (Agol 12, Wise '10): M^3 hyperbólica cerrada (con borde $\mathbb{T}^2$'s)

$\Rightarrow$ subgrupos (relativamente) quasiconvexos de $\Gamma = \pi_1(M)$ son separables

LEMA: $H < \Gamma$ es separable si:

i) $\{1\} < \Gamma$ separable, y

ii) $\exists\, H < \hat{\Gamma} < \Gamma$, $|\Gamma : \hat{\Gamma}| < \infty$ y $\hat{\Gamma} \xrightarrow{\rho} H$

tq $\rho(\Gamma) = H$ & $\rho|_H = id_H$ (retracción)

DEMOSTRACIÓN:

$\hookrightarrow r : \hat{\Gamma} \longrightarrow \hat{\Gamma}$, $x \longmapsto \rho(x)x^{-1}$ continua

$\hookrightarrow H = r^{-1}(\{1\})$ + $\{1\}$ cerrado

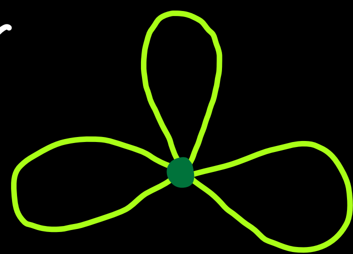
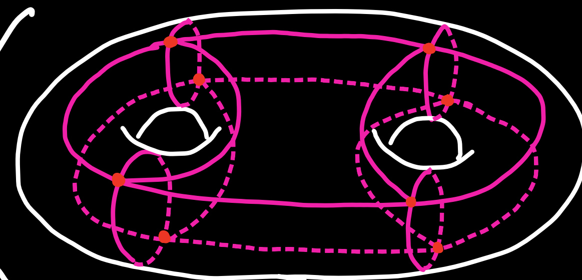
$\hookrightarrow \hat{\Gamma} \subset \Gamma$ abierto y cerrado

CAMBIAR DE CATEGORÍA!!!

COMPLEJOS CÚBICOS CAT(0)

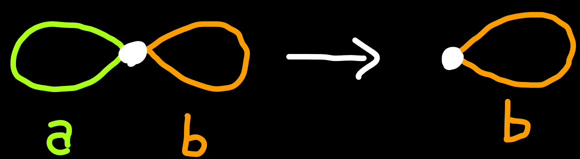
DEFINICIÓN: * X complejo cúbico (Euclideanos con lados de largo 1) es **CAT(0)** si $\pi_1(X)\simeq\{1\}$ y "no tiene porciones de esferas"

* Γ es **cubulable** si actúa en algún complejo cúbico CAT(0) de forma simplicial, propia y cocompacta

EJEMPLOS: $\pi_1\Bigg($  $\Bigg)$, $\pi_1\Bigg($  $\Bigg)$

EJEMPLO: $H < \langle a,b\rangle = \pi_1(\infty)$ finitamente generado

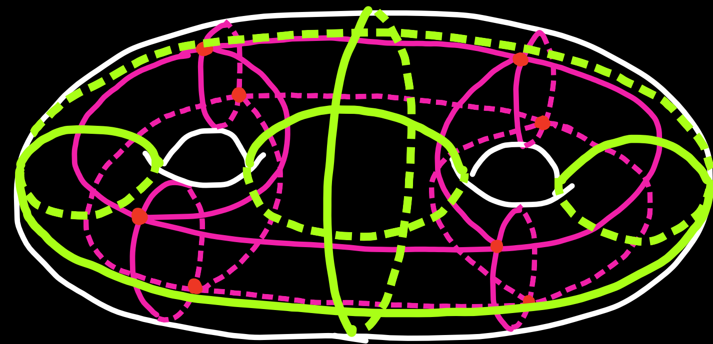
$\Rightarrow H$ retracción virtual



$\rightsquigarrow$

$$\langle a,b\rangle \twoheadrightarrow \langle b\rangle$$
$$a \longmapsto 1$$
$$b \longmapsto b$$

TEOREMA (Bergeron-Wise '10): M^3 cerrada hiperbólica
$\Longrightarrow$ $\pi_1(M^3)$ cubulable
[CLAVE: superficies de Kahn-Markovic]



TEOREMA (Agol '12): Γ grupo hiperbolico y cubulable
$\Longrightarrow$ subgrupos quasiconvexos son separables

TEOREMA (R., Groves-Manning '20):
Γ grupo hiperbolico relativo a subgrupos abelianos y cubulable $\Longrightarrow$ subgrupos relativamente quasiconvexos son separables

EJEMPLO:
* $\pi_1(M^3$ hiperbólica con o sin borde)
* Γ cociente de cancelación pequeña $C'(1/6)$ sobre grupos hiperbólicos cubulables y/o abelianos

Gracias!!!