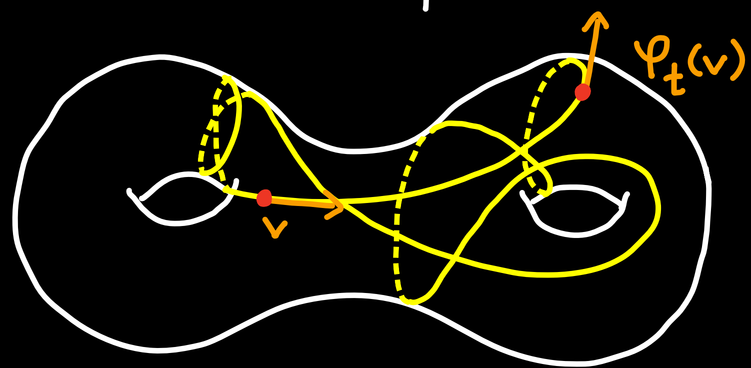
Comparacion Estadística de Acciones en Complejos Cúbicos CAT(0)

Eduardo Reyes
Instituto Max Planck de Matemática

Encuentro SOMACHI
19 de Diciembre
2023

MOTIVACIÓN

(M, g): variedad cerrada de curvatura negativa $\qquad \Gamma = \pi_1(M)$



- **FLUJO GEODÉSICO:** $\varphi_t = \varphi_t^g : T^1M \circlearrowleft$

  Anosov!!!

$[\Gamma]$

$\shortparallel$

Clases de conjugación primitivas en Γ $\longleftrightarrow$ Geodésicas cerradas orientadas en M_g $\longleftrightarrow$ Órbitas periódicas en flujo geodésico

$[g]$ $\qquad \gamma_g$ $\qquad \mu_g$

(medida invariante de soporte γ_g)

- **FUNCIÓN DE LONGITUD:** $\ell_g : [\Gamma] \longrightarrow \mathbb{R}$

  $[g] \longmapsto$ Largo de γ_g en M_g

FILOSOFÍA: COMPARAR DOS MÉTRICAS g, g_* EN M MEDIANTE SUS FUNCIONES DE LONGITUD ℓ_g, ℓ_{g_*}

COMPARACIÓN DINÁMICA

$\exists$ homeomorfismo $\Phi : T^1 M_g \longrightarrow T^1 M_{g_*}$ que manda órbitas en órbitas $+$ reparametrización Hölder $\beta : T^1 M_g \rightarrow \mathbb{R}$

$$[g] \in \Gamma \quad \Rightarrow \quad \int \beta \, d\mu_g = \frac{\ell_{g_*}[g]}{\ell_g[g]}$$

CONSECUENCIAS

- $\displaystyle \int \beta \, d\underset{\text{medida de máxima entropía}}{BM_g} = J(g_*, g) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{\#\{\ell_g \leq T\}} \sum_{\ell_g \leq T} \frac{\ell_{g_*}[g]}{\ell_g[g]} \geq \underbrace{v_g / v_{g_*}}_{\text{Entropías de volumen}}$
- $J(g_*, g) = v_g / v_{g_*} \longleftrightarrow \ell_{g_*}[g] = \frac{v_g}{v_{g_*}} \ell_g[g] \; \forall [g] \overset{*}{\longleftrightarrow} M_g, M_{g_*}$ homotéticas

$*$ + Creer en rigidez de espectro de longitud marcado

$\therefore$ $J(g_*, g) v_{g_*} / v_g$ mide diferencia entre g y g_*

OBJETIVO: Comparación similar para complejos cúbicos CAT(0) [conjunto con Stephen Cantrell (Warwick)]

Trabajo Relacionado

Burger '93: Pares de rep. geométricamente finitas (Curvas de Manhattan)
$\rho, \rho_*: \Gamma \longrightarrow SO^+(n,1) = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^n)$

Sharp '10: Pares de Grafos

Calegari-Fujiwara '10: Pares de métricas de la palabra en grupos hiperbólicos

Kao '20: Rep. quasi Fuchsianas vs Métricas Riemannianas en superficies

Bray-Canary-Kao '20: Pares de rep. quasi Fuchsianas
$\rho, \rho_*: \Gamma \to PSL_2\mathbb{C}$

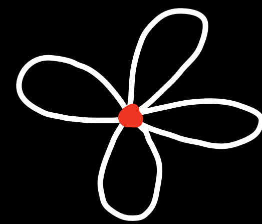
Cantrell-Tanaka '21: Pares de métricas hiperbólicas en grupos hiperbólicos

Bray-Canary-Kao-Martone '21: Pares de rep. Hitchin
$\rho, \rho_*: \Gamma \to PSL_d(\mathbb{R})$

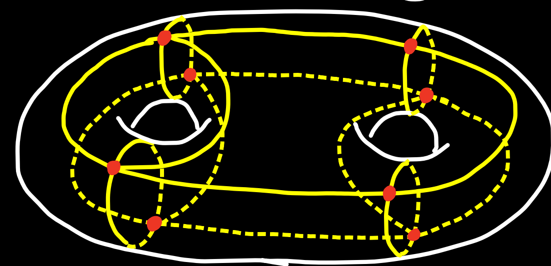
Observación: Γ siempre es (relativamente) hiperbólico

Complejos Cúbicos NPC

$\mathcal{X}$: – Complejo Poliedral, pegar cubos a través de (sub) caras
– NPC: Versión combinatorial de curvatura no positiva
– CAT(0): NPC + $\pi_1 = \{1\}$



Ejemplo: Grafos son NPC, árboles son CAT(0)



Ejemplo: Superficies hiperbólicas cerradas homeomorfas a c.c. NPC

Teorema (Kahn-Markovic '12, Bergeron-Wise '11):
M^3 3-variedad cerrada hiperbólica $\Rightarrow M \underset{h.e.}{\sim} \mathcal{X}$ c.c. NPC compacto

(Herramienta: Flujo en fibrado de framings es exponencialmente mixing)

Ejemplo: Productos de c.c. NPC son NPC

$\mathcal{X}$ c.c. NPC compacto $\longleftrightarrow$ $\Gamma = \pi_1(\mathcal{X}) \curvearrowright \widetilde{\mathcal{X}}$ c.c. CAT(0) libre + cocompacta

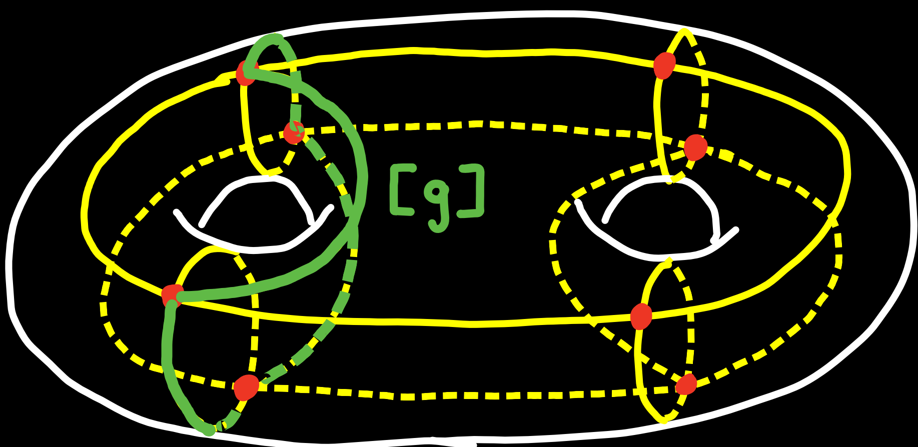
Geometria de c.c. NPC

Distancia combinatorial en $\mathcal{X}^{(1)}$ (grafo)

$\mathcal{X}$: Complejo cúbico NPC compacto $\qquad \Gamma = \pi_1(\mathcal{X})$

- **Función de Longitud:** $\ell_{\mathcal{X}} : [\Gamma] \longrightarrow \mathbb{R}$

  $[g] \mapsto$ mínimo largo combinatorial de curva en clase de $[g]$



$\ell_{\mathcal{X}}[g] = 4$

Peligro: geodésicas no son únicas

Contexto: $\mathcal{X}, \mathcal{X}_*$ c.c. NPC compactos, $\Gamma = \pi_1(\mathcal{X}) \xrightarrow{\simeq} \pi_1(\mathcal{X}_*)$

Queremos comparar $\ell_{\mathcal{X}}, \ell_{\mathcal{X}_*} : [\Gamma] \to \mathbb{Z}$

Resultado Principal

Teorema (Cantrell-R. '23): Γ "estadísticamente hiperbólico" + $\mathcal{X}, \mathcal{X}_*$ c.c. NPC compactos "compatibles" + isomorfismos $\Gamma \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathcal{X}), \pi_1(\mathcal{X}_*)$

Entonces:

1) $\exists$ cubrimiento finito $\hat{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$
2) $\exists$ autómata finito

$$\mathcal{A} = \{ \underbrace{\mathcal{G}}_{\text{grafo dirigido finito}} = (V, E, \overset{\text{estados iniciales}}{I}), \underbrace{S_{\hat{\mathcal{X}}}}_{\text{alfabeto: hiperplanos de } \hat{\mathcal{X}}}, \overset{\text{etiquetado } \pi : E \to S_{\hat{\mathcal{X}}}}{\pi} \}$$

3) $\exists$ potencial $\beta : E \to \mathbb{Z}$

tq

Camino en $\mathcal{G}$ $\quad\longleftrightarrow\quad$ Geodésica en $\hat{\mathcal{X}}$

$$\omega = (v_0 \xrightarrow{e_1} v_1 \to \cdots \xrightarrow{e_n} v_n) \quad\longleftrightarrow\quad (x_0 \xrightarrow{\pi(e_1)} x_1 \to \cdots \xrightarrow{\pi(e_n)} x_n)$$

$$v_0 = v_n \quad\longleftrightarrow\quad x_0 = x_n \; (\rightsquigarrow [g_\omega] \in [\pi_1(\hat{\mathcal{X}})])$$

$$\boxed{\beta(e_1) + \cdots + \beta(e_n) = \ell_{\hat{\mathcal{X}}_*}[g_\omega]}$$

"Flujo geodésico": Shift de Markov asociado a $\mathcal{G}$

APLICACIONES

EJEMPLO: Γ hiperbólico $\Rightarrow$ Compatibilidad automática (Agol'13)

RIGIDEZ:

1) $J(\mathcal{X}_*,\mathcal{X}) := \lim_{T\to\infty} \dfrac{1}{\#\{\ell_{\mathcal{X}} \leq T\}} \sum_{\ell_{\mathcal{X}} \leq T} \dfrac{\ell_{\mathcal{X}_*}[g]}{\ell_{\mathcal{X}}[g]} \geq v_{\mathcal{X}} / v_{\mathcal{X}_*}$

Begrer-Fioravanti'21

2) $J(\mathcal{X}_*,\mathcal{X}) = v_{\mathcal{X}}/v_{\mathcal{X}_*} \longleftrightarrow \ell_{\mathcal{X}_*}[g] = \dfrac{v_{\mathcal{X}}}{v_{\mathcal{X}_*}} \ell_{\mathcal{X}}[g] \ \forall [g] \longleftrightarrow \mathcal{X}, \mathcal{X}_*$ "homotéticos"

LARGOS DESVÍOS CON SHRINKING: (+Marcus-Tuncel'90)

$$a_- := \inf_{[g]} \frac{\ell_{\mathcal{X}_*}[g]}{\ell_{\mathcal{X}}[g]} \qquad a_+ := \sup_{[g]} \frac{\ell_{\mathcal{X}_*}[g]}{\ell_{\mathcal{X}}[g]}$$

$\Rightarrow \exists\ \mathcal{I} : [a_-, a_+] \to \mathbb{R}$ analítica y $C > 0$ tq si $\eta \in (a_-, a_+)$:

$$\mathcal{I}(\eta) = \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log\left(\#\left\{[g] \,\middle|\, \ell_{\mathcal{X}}[g] < T,\ |\ell_{\mathcal{X}_*}[g] - \eta\,\ell_{\mathcal{X}}[g]| \leq \frac{C}{T}\right\}\right) > 0$$

Gracias!!!