

COMPLEJOS CÚBICOS Y CURVATURA NO POSITIVA

*EDUARDO REYES

PUC

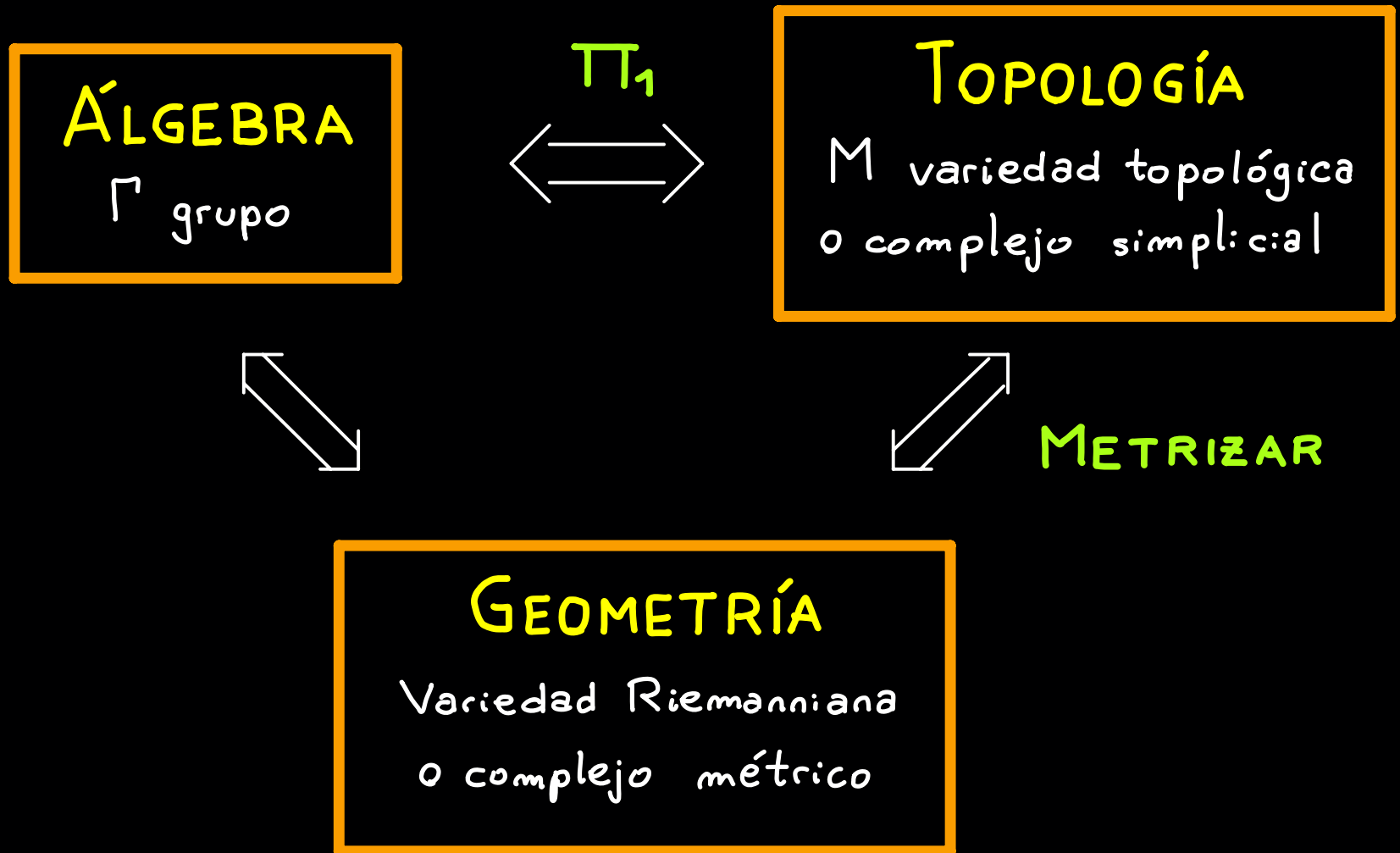
Seminario DMAT, USM

Jueves 27 de Agosto

2026

* Parcialmente financiado por ANID/FONDECYT Iniciación 11260637

MOTIVACIÓN



HIPÓTESIS: CURVATURA NO POSITIVA

RECUERDO DE GRUPOS

$\Gamma = (\Gamma, \cdot)$, $\Gamma * \Gamma \rightarrow \Gamma$ asociativa, $\exists$ neutro e , $\exists$ inversos

SIMETRÍAS!!! $\Gamma \simeq X$

EJEMPLOS (FINITOS): $\{e\}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, S_n , A_n , D_n , productos (semi)directos

Naturaleza Combinatorial

$\Gamma \simeq X$, X finito

EJEMPLOS (INFINITOS): $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$, $GL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{R})$, $O(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{Z})$

Hoy: GRUPOS DISCRETOS INFINITOS

PRESENTACIÓN

$$\Gamma = \langle S | R \rangle$$

generadores

relaciones

EJEMPLOS:

* $\mathbb{Z}^2 = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$

* $D_n = \langle r, s \mid r^n, s^2, sr s^{-1}r \rangle$

* $F_n = \langle x_1, \dots, x_n \mid \emptyset \rangle$ **Grupo Libre**

S finito $\rightsquigarrow \Gamma$ **FINITAMENTE GENERADO**

S, R finitos $\rightsquigarrow \Gamma$ **FINITAMENTE PRESENTADO**

TEOREMA (ADIAN '55, RABIN '58): ~~$\exists$~~ algoritmo con

Input : $\Gamma = \langle S | R \rangle$ presentación finita

Output: Y o N dependiendo si $\Gamma \simeq \{e\}$

GRUPO FUNDAMENTAL

X espacio topológico arcoconexo, $x \in X$

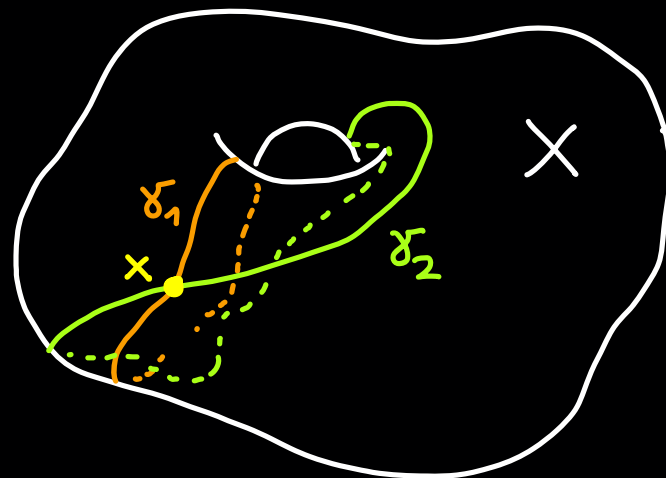
$$\pi_1(X) = \left\{ \text{Curvas } \gamma: [0,1] \rightarrow X, \gamma(0)=\gamma(1)=x \right\} / \text{homotopía}$$

OPERACIÓN: Concatenar caminos

$$\gamma_1 * \gamma_2$$

$\pi_1(X)$ ES GRUPO!

$$[\gamma] * [\eta] := [\gamma * \eta]$$

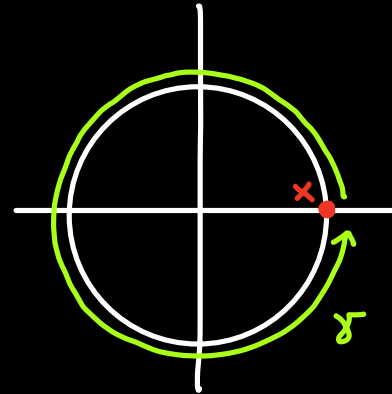


NEUTRO : $e = [\text{constante} = x]$

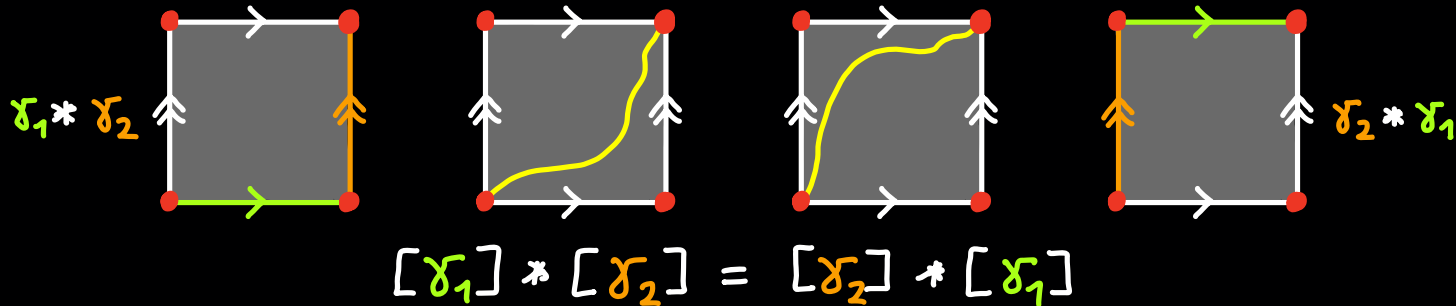
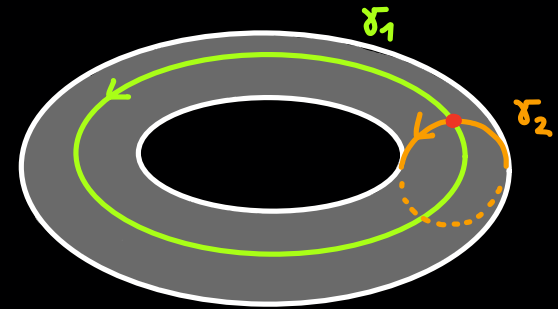
INVERSA: $[\gamma]^{-1} = [\bar{\gamma}]$ revertir orientación

EJEMPLOS

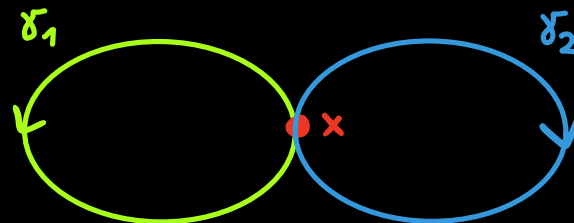
* **CÍRCULO** $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\}$
 $\pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z} = \langle [\gamma] \rangle, \quad \gamma(t) = e^{2\pi i t}$



* **2-TORO** $\Pi^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$
 $\pi_1(\Pi^2) \simeq \pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}^2 = \langle [\gamma_1], [\gamma_2] \rangle$



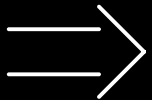
* **ROSA** $\mathcal{R}_2 = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$
 $\pi_1(\mathcal{R}_2) \simeq F_2 = \langle [\gamma_1], [\gamma_2] \rangle$



CURVATURA NO POSITIVA (RIEMANNIANA)

M^n variedad Riemanniana suave, $\Gamma \simeq \pi_1(M)$

- Compacta, sin borde, orientable
- Curvaturas seccionales ≤ 0



- * Γ es finitamente presentado, infinito, sin torsión
- * Cubrimiento universal $\tilde{M}$ es $\approx \mathbb{R}^n$ ($\therefore$ contractible)
- * Si $H < \Gamma$ isomorfo a $\mathbb{Z}^k$

$\Rightarrow \exists$ k -toro $\mathbb{T}^k \xrightarrow{f} M$ totalmente geodésico tal que
 $f_*(\pi_1(\mathbb{T}^k)) = H$

IDEA (GROMOV '80s): Γ grupo de interés

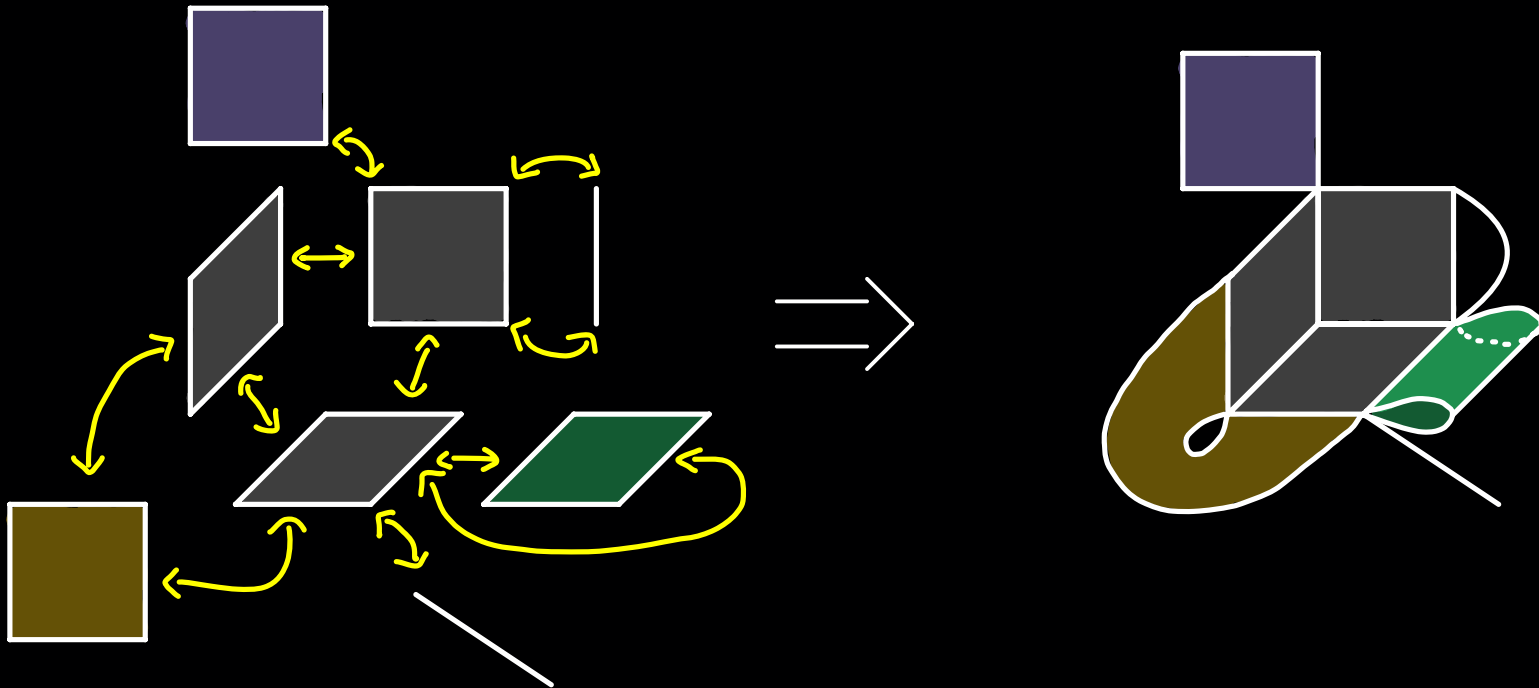


Ver $\Gamma \simeq \pi_1(X)$

X no variedad, pero con CURVATURA NO POSITIVA

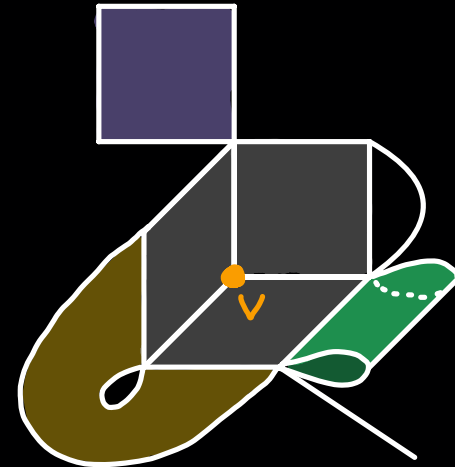
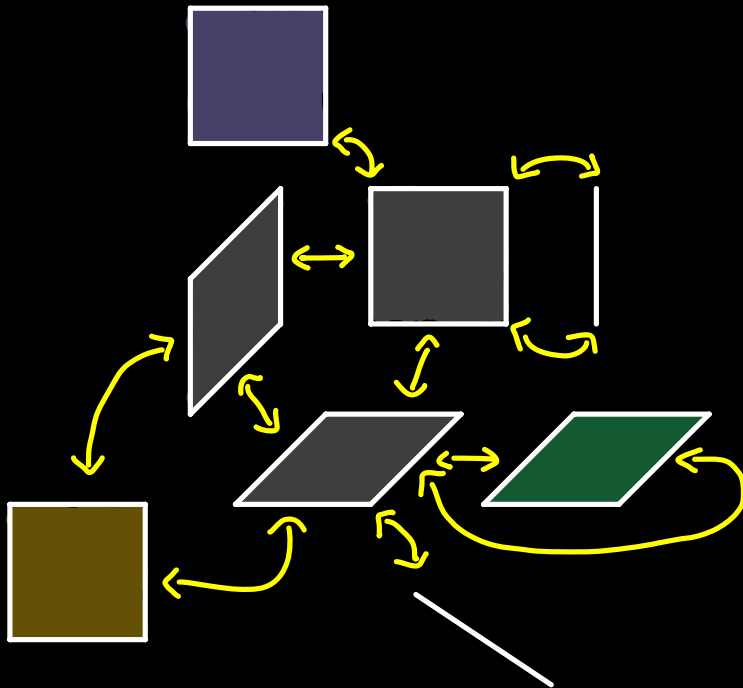
COMPLEJOS CÚBICOS NPC

COMPLEJO CÚBICO: Pegar cubos Euclídeos de lado 1 isométricamente por (sub)caras



COMPLEJOS CÚBICOS NPC

COMPLEJO CÚBICO: Pegar cubos Euclídeos de lado 1 isométricamente por (sub)caras

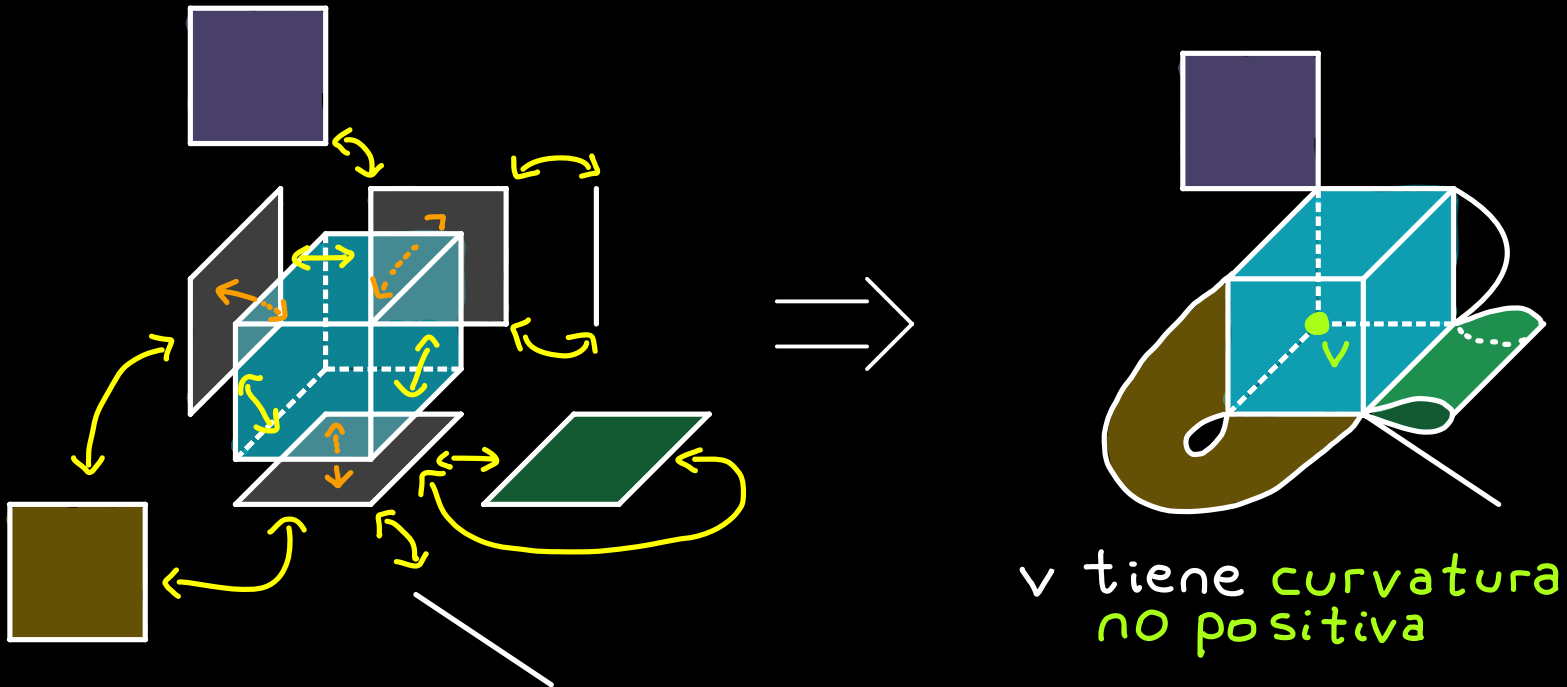


v tiene curvatura positiva

NPC: Condición de curvatura en cada vértice: "NO ESFERAS"

COMPLEJOS CÚBICOS NPC

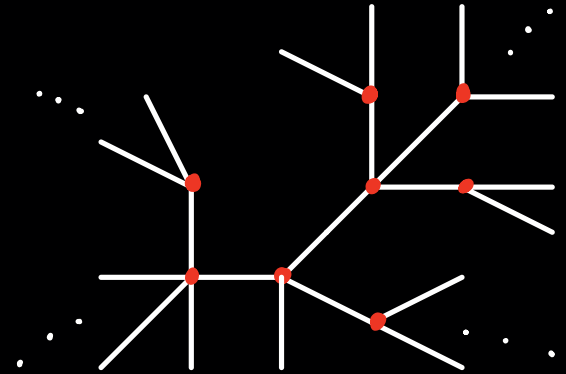
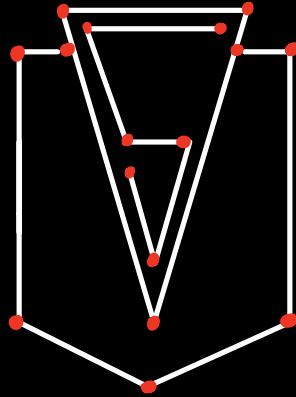
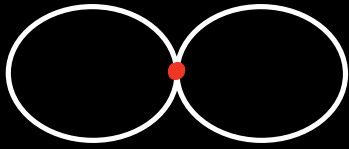
COMPLEJO CÚBICO: Pegar cubos Euclídeos de lado 1 isométricamente por (sub)caras



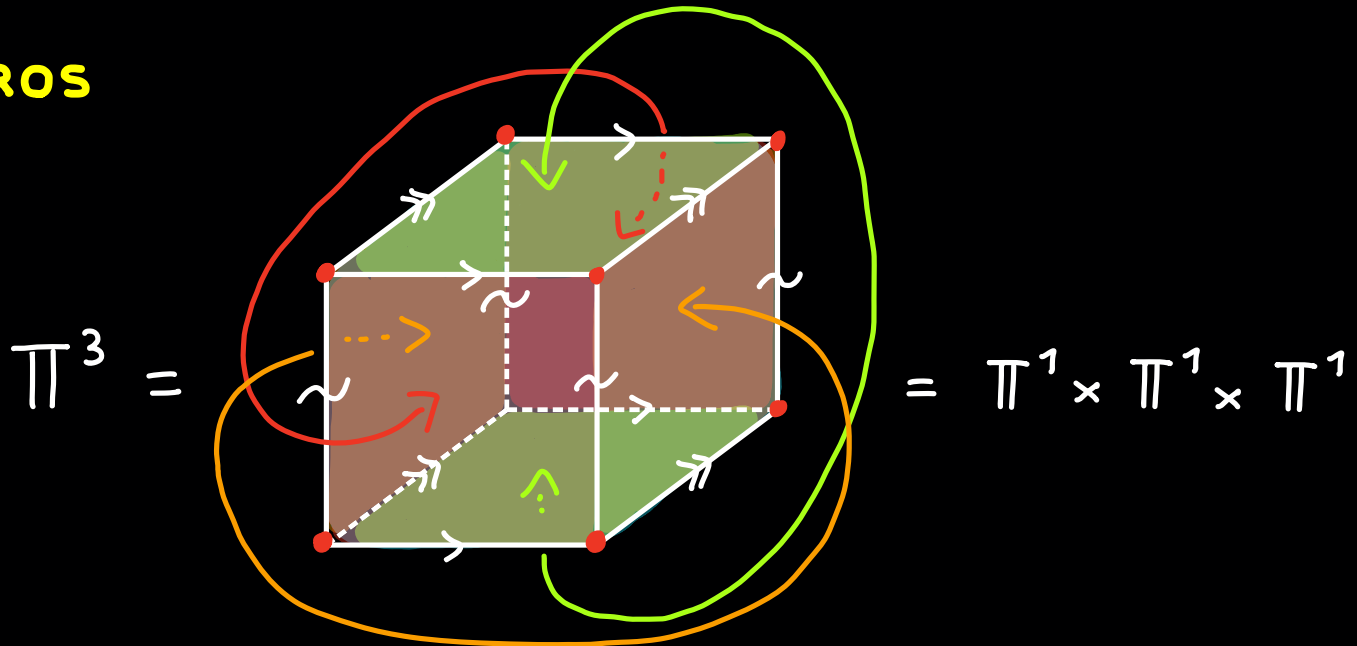
NPC: Condición de curvatura en cada vértice: "NO ESFERAS"

EJEMPLOS

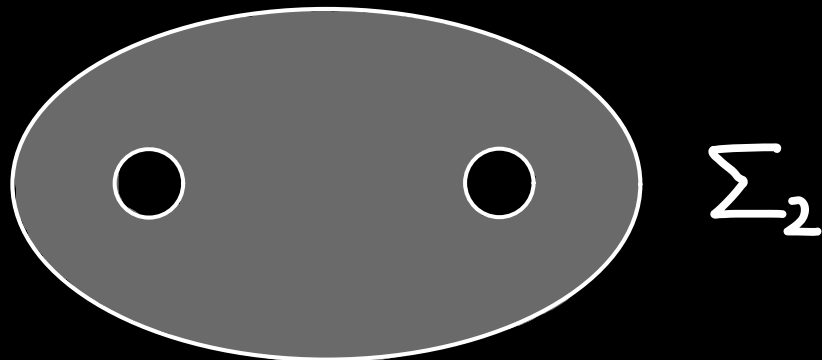
* GRAFOS



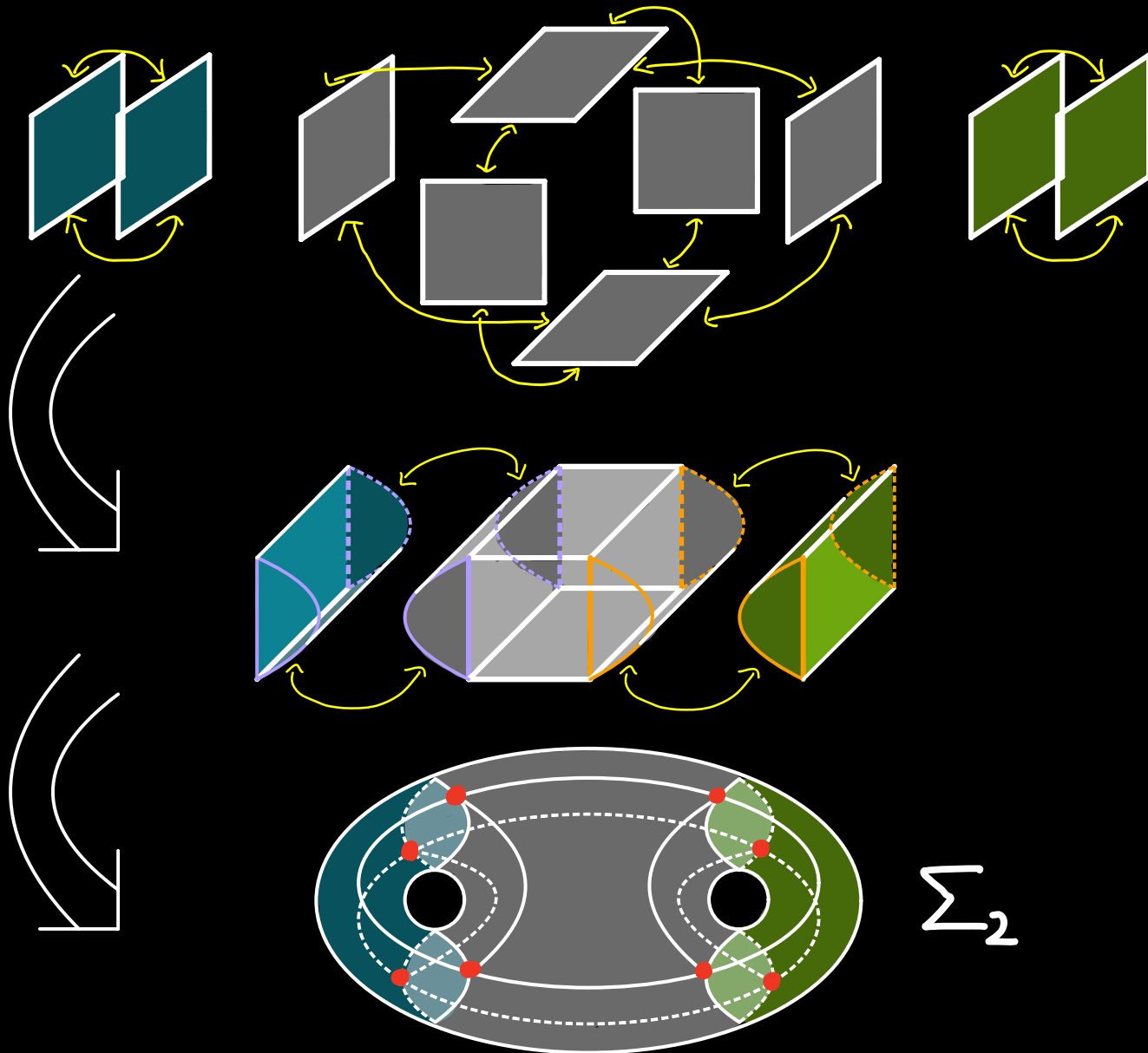
* n-TOROS



EJEMPLO: SUPERFICIES



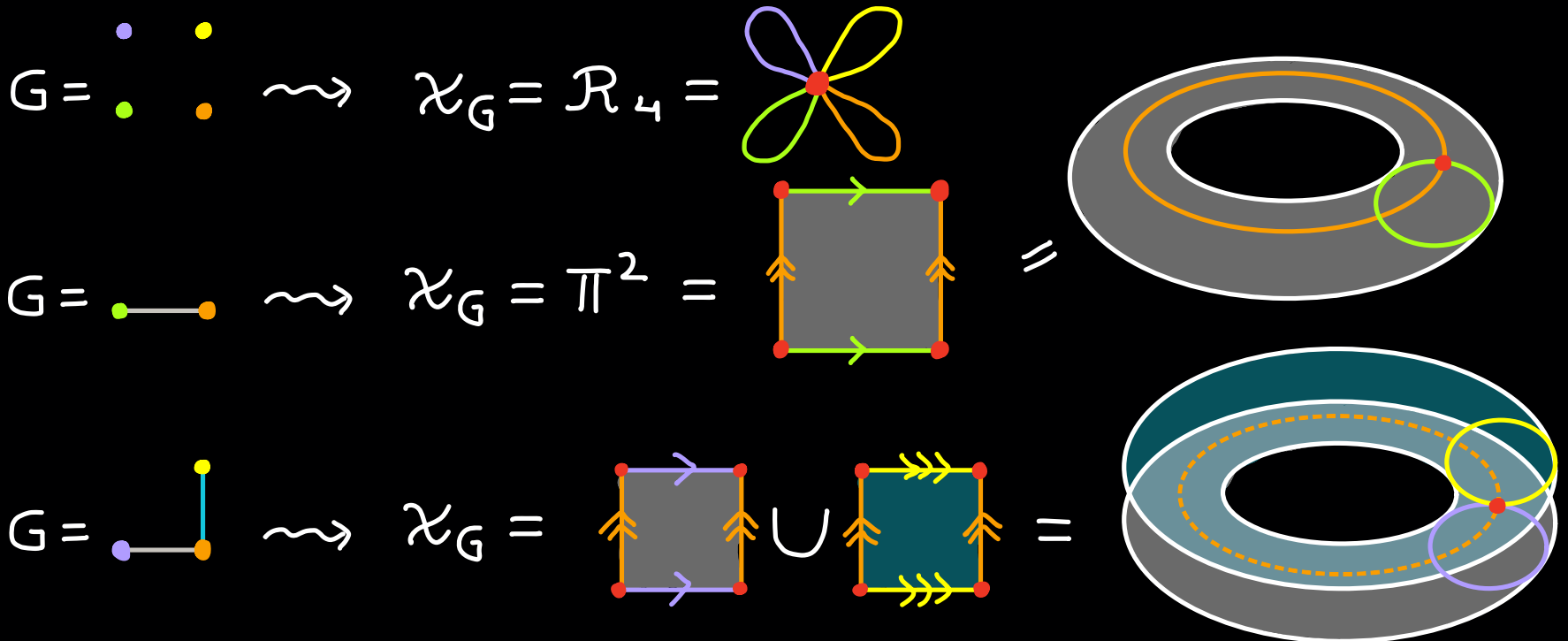
EJEMPLO: SUPERFICIES



EJEMPLO: COMPLEJOS DE SALVETTI

grafo simplicial finito $\nearrow$

$$\chi_G := \begin{cases} 1 & \text{vértice} \\ +1 & \text{1-toro por cada vértice de } G \\ +1 & \text{2-toro por cada arista de } G \\ \vdots & \vdots \\ +1 & \text{n-toro por cada n-grafo de } G \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$



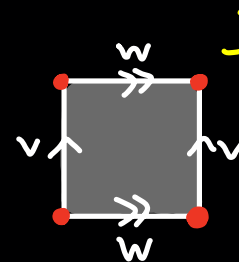
GRUPOS CUBULABLES

GRUPO CUBULABLE : $\Gamma \simeq \pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{X})$
 $\mathcal{X}$ complejo cúbico NPC compacto

EJEMPLOS:

- * $\mathbb{Z}^n \simeq \pi_1(\mathbb{T}^n)$ (cubulable $\times$ cubulable = cubulable)
- * $F_n \simeq \pi_1(\mathcal{R}_n)$ (cubulable $*$ cubulable = cubulable)
- * Grupos de superficie: $\pi_1(\underbrace{\Sigma_g}_\text{superficie de género } g) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \cdot \dots \cdot [a_g, b_g] \rangle$

- * **RAAGs**: Grupos de Artin de ángulo recto
 $A_G = \pi_1(\mathcal{X}_G) = \langle \text{Vértices de } G \mid vw = wv \text{ ssi } \{v, w\} \text{ arista de } G \rangle$

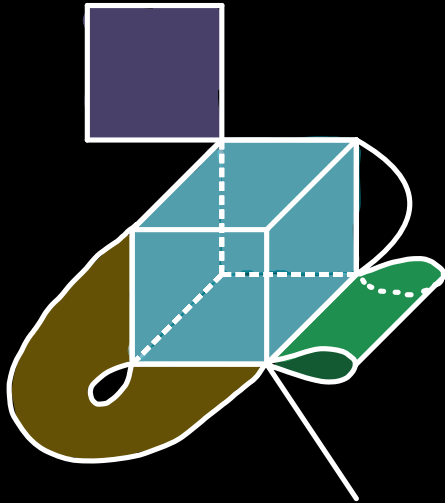


CÓMO CUBULAR UN GRUPO?

HIPERPLANOS



SUBGRUPOS DE
CODIMENSIÓN 1

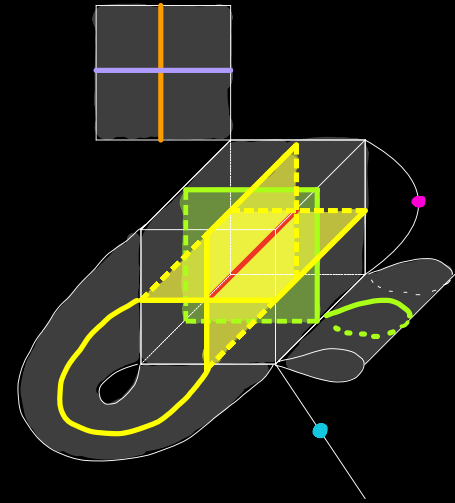
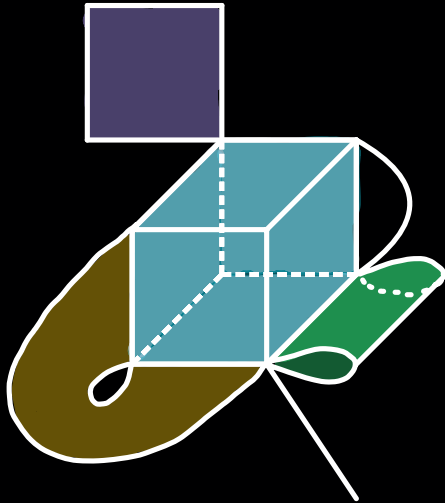


CÓMO CUBULAR UN GRUPO?

HIPERPLANOS



SUBGRUPOS DE
CODIMENSIÓN 1



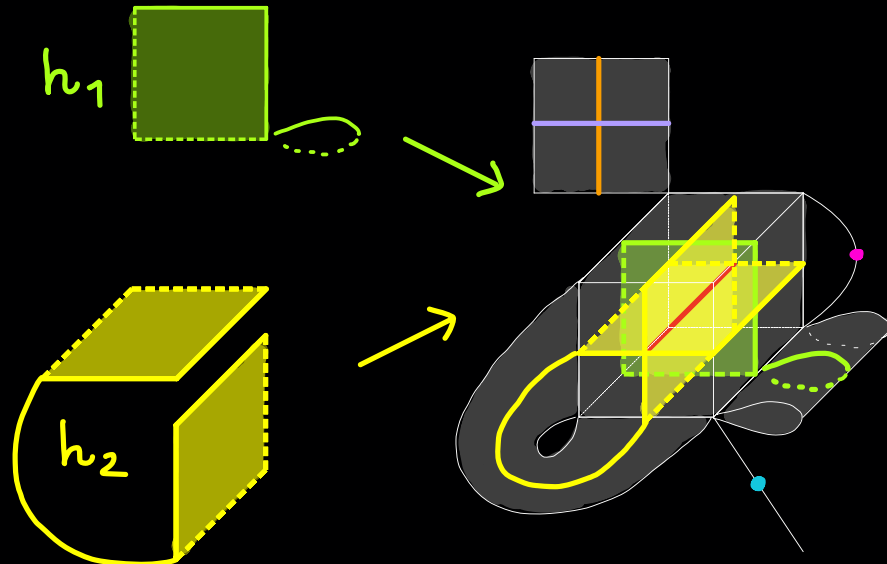
CÓMO CUBULAR UN GRUPO?

HIPERPLANOS



SUBGRUPOS DE CODIMENSIÓN 1

PROPIEDAD: $\pi_1(h) \hookrightarrow \pi_1(X)$



$$\pi_1(h_1) \simeq \mathbb{Z}$$

$$\pi_1(h_2) \simeq \{e\}$$

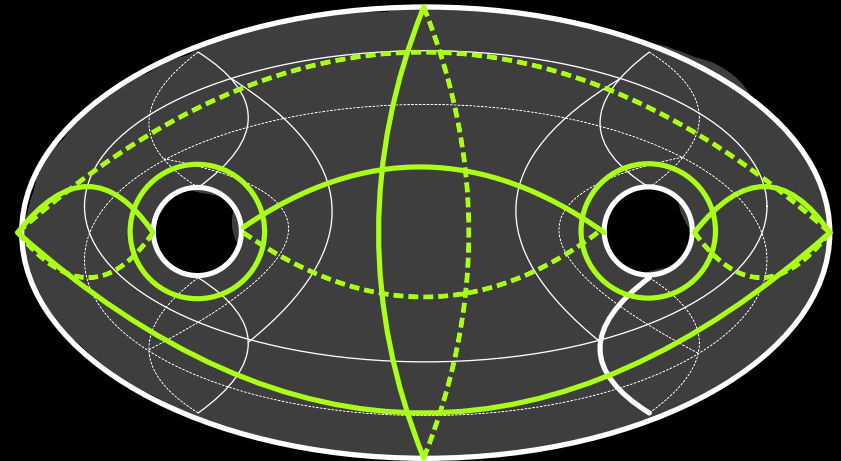
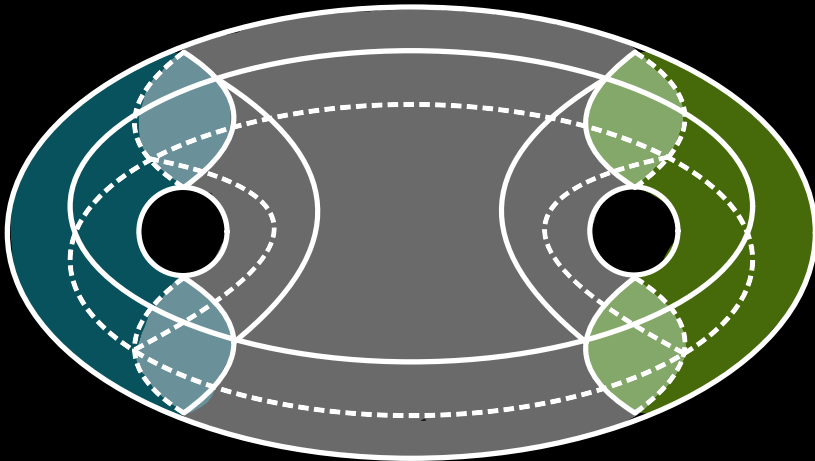
CÓMO CUBULAR UN GRUPO?

HIPERPLANOS



SUBGRUPOS DE
CODIMENSIÓN 1

PROPIEDAD: $\pi_1(h) \hookrightarrow \pi_1(X)$

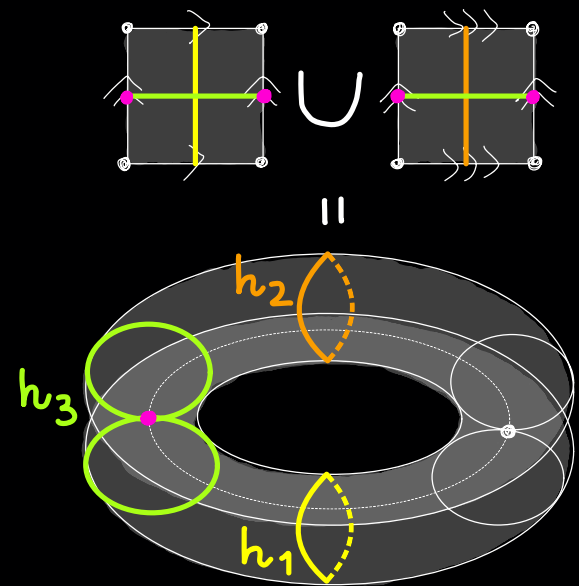
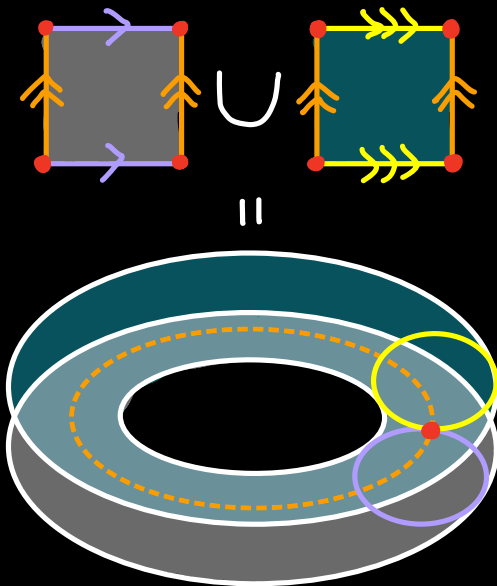


$$\pi_1(h) \simeq \mathbb{Z} \quad \forall h$$

CÓMO CUBULAR UN GRUPO?

HIPERPLANOS $\longleftrightarrow$ SUBGRUPOS DE CODIMENSIÓN 1

PROPIEDAD: $\pi_1(h) \hookrightarrow \pi_1(X)$



$$\pi_1(h_1) \simeq \mathbb{Z}$$

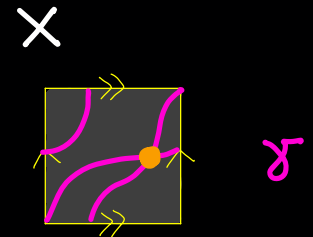
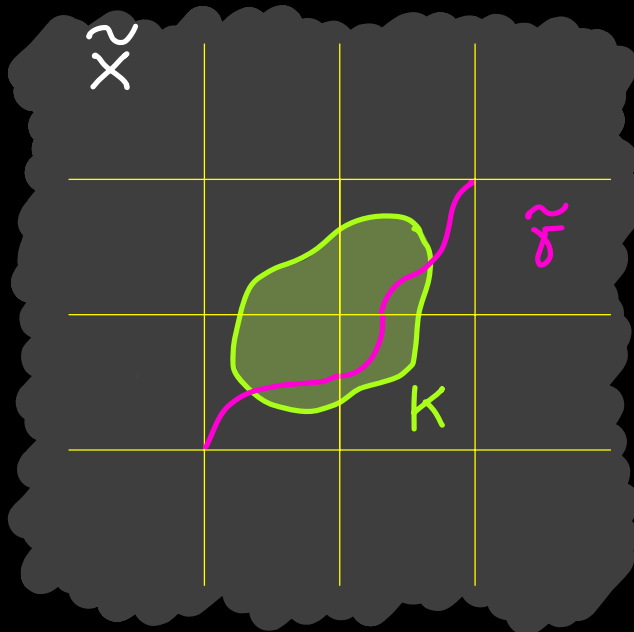
$$\pi_1(h_2) \simeq \mathbb{Z}$$

$$\pi_1(h_3) \simeq F_2$$

PARA QUÉ CUBULAR?

"Resolución de singularidades"
en cubrientes finitos

PROPIEDAD: Todo RAAG A_G es **RESIDUALMENTE FINITO**
 $A_G \cong \pi_1(X)$, $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ cubriente universal, $K \subset \tilde{X}$ compacto
CW complejo



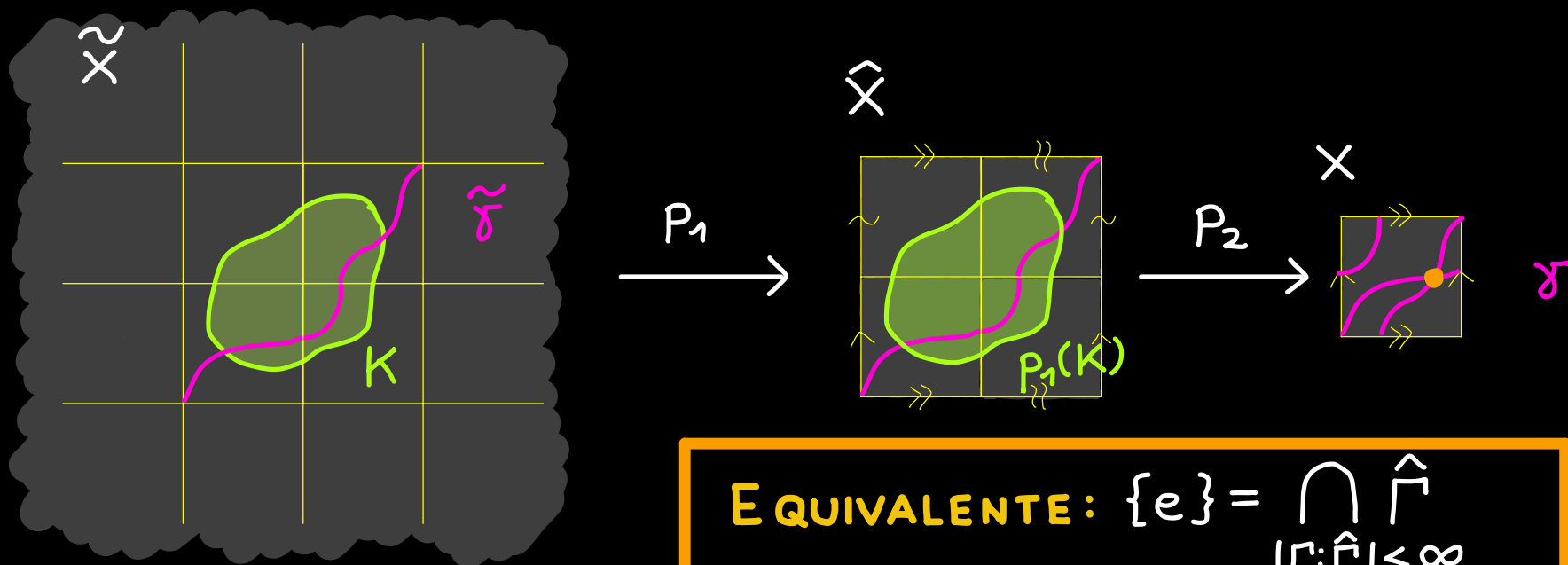
PARA QUÉ CUBULAR?

"Resolución de singularidades"
en cubrientes finitos

PROPIEDAD: Todo RAAG A_G es **RESIDUALMENTE FINITO**

$A_G \cong \pi_1(X)$, $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ cubriente universal, $K \subset \tilde{X}$ compacto
CW complejo

$\Rightarrow \exists \tilde{X} \xrightarrow{p_1} \hat{X} \xrightarrow{p_2} X$, p_2 cubriente finito, $p_1|_K$ inyectiva



EQUIVALENTE: $\{e\} = \bigcap_{|\Gamma| < \infty} \hat{\Gamma}$

APLICACIÓN: GRUPOS DE UN RELATOR CON TORSIÓN

$$\Gamma = \langle s_1, \dots, s_n \mid r^m \rangle \quad m > 1$$

EJEMPLOS: $\ast \langle a, b \mid b^m \rangle \simeq \mathbb{Z} \ast \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

$\ast \langle a_1, \dots, a_{2025} \mid (a_1 a_3 a_5 \dots a_{2017})^3 \rangle$

TEOREMA (WISE '11): Γ grupo de 1 relator con torsión
 $\Rightarrow$ 1) Γ cubulable : $\Gamma = \pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{X})$
2) $\exists \Gamma' < \Gamma$, $[\Gamma : \Gamma'] < \infty$ tq $\Gamma' \hookrightarrow A_G \leftarrow \text{RAAG}$

CONSECUENCIA: Γ es residualmente finito

Solución a
Conjetura de
Baumslag

APLICACIÓN: GRUPOS DE 3-VARIEDADES

$\Gamma \cong \pi_1(M)$, M 3-variedad Riemanniana, completa, sin borde
curvatura $\equiv -1$ ($\tilde{M} \underset{\text{isom}}{\cong} \mathbb{H}^3$) + volumen finito

- 3-variedades "genéricas"
- Más misteriosas

EJEMPLO: $\mathbb{S}^3 \setminus \text{link}$

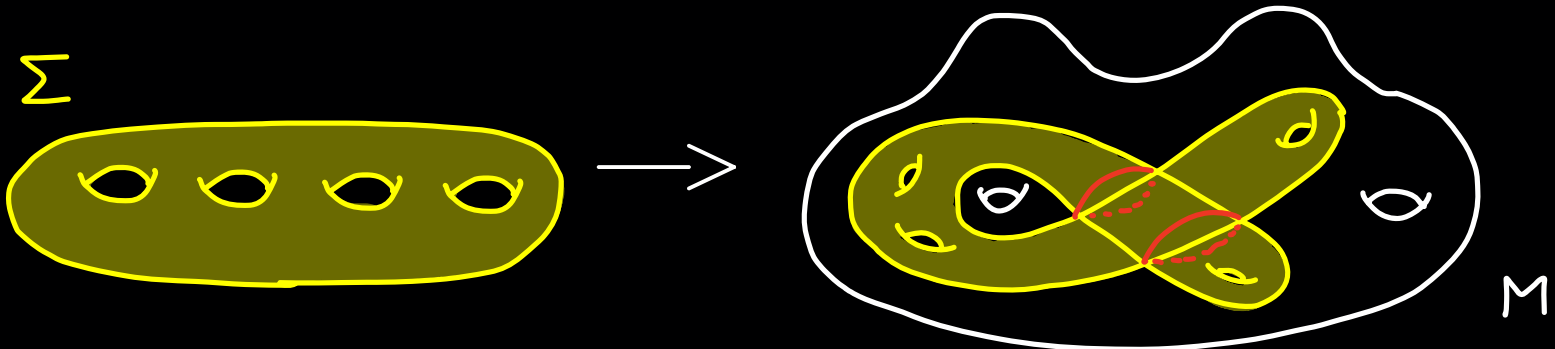


TEOREMA (KAHN-MARKOVIC '12, BERGERON-WISE '11):

M compacta $\Rightarrow \Gamma$ cubulable

$\rightsquigarrow$ Existen muchas superficies π_1 -inyectivas
(codimensión 1)

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \hookrightarrow & M \\ \pi_1(\Sigma) & \hookrightarrow & \Gamma \end{array}$$



^{compacto}
^{no-compacto}
TEOREMA (AGOL'13, WISE'10): $\exists \Gamma' < \Gamma, |\Gamma : \Gamma'| < \infty, \Gamma' \hookrightarrow A_G$

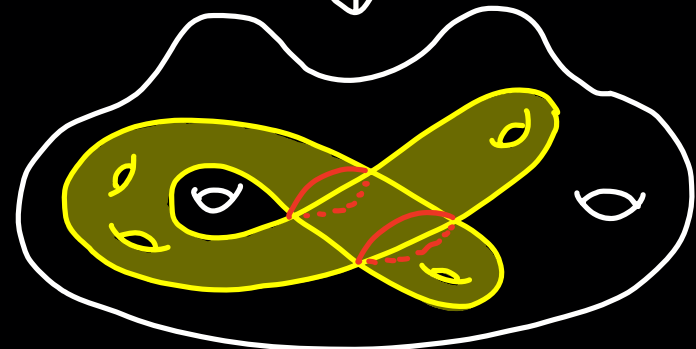
CONSECUENCIA: Existe cubriente finito $\hat{M} \rightarrow M$
 tal que $\Sigma \hookrightarrow \tilde{M}$ incrustación

Solución a
 Conjetura de
 Waldhausen

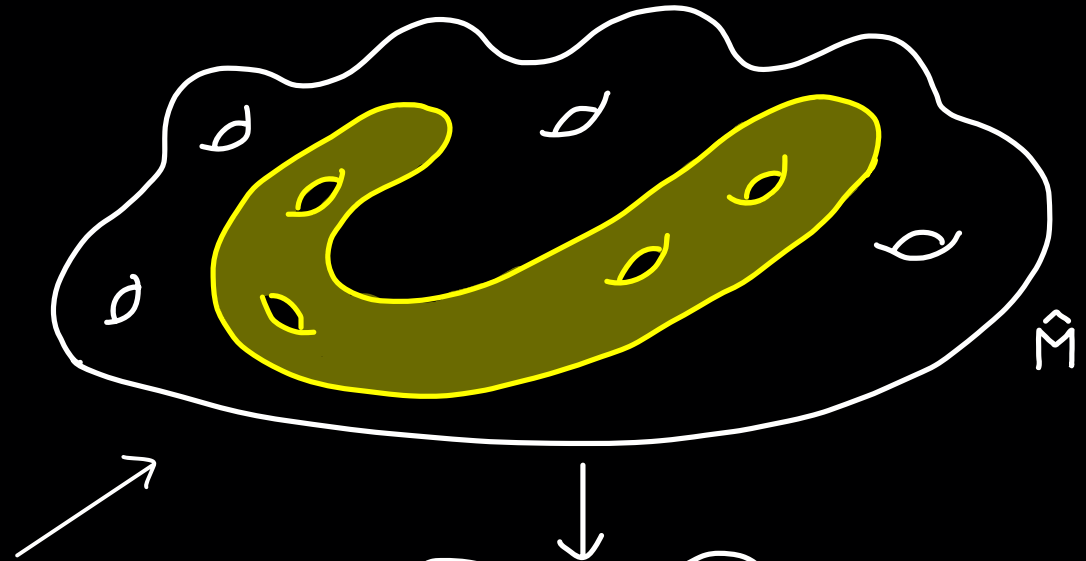
EQUIVALENTE:

$$\pi_1 \Sigma = \bigcap_{\substack{|\pi_1 M : \hat{\Gamma}| < \infty \\ \pi \Sigma < \hat{\Gamma}}} \hat{\Gamma}$$

Σ



M



$\hat{M}$

EXTENSIONES DE TEOREMAS DE AGOL Y WISE

TEOREMA (GROVES-MANNING '23, R. '23):

Producto libre de RAAGs

$$\Gamma = \overbrace{A_{G_1} * \dots * A_{G_n}} / \langle\langle r_1, \dots, r_k \rangle\rangle \quad \text{cociente de "cancelación pequeña"}$$

$$\Rightarrow \exists \Gamma' \text{ con } |\Gamma : \Gamma'| < \infty \text{ y } G \text{ con } \Gamma' \hookrightarrow A_G$$

EJEMPLO (GROVES-MANNING):

$$\Gamma = \left\langle a_1, \dots, a_6, b_1, \dots, b_6 \mid \begin{array}{l} [a_1, b_1], \dots, [a_6, b_6], \\ a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 \\ a_4 b_2 b_5 a_3 a_1, a_3 b_5 b_1 b_4 a_6 \end{array} \right\rangle$$

APLICACIÓN: VARIEDADES HIPERBÓLICAS

M n -variedad Riemanniana, completa, sin borde

$$\text{curvatura} \equiv -1 \quad (\tilde{M} \underset{\text{isom}}{\simeq} \mathbb{H}^n)$$

TEOREMA (BUSTAMANTE-R.-RIOLO '26): Existen muchas n -variedades hiperbólicas M , compactas, orientables tq:

$$p_1(M) \neq 0 \quad (n \geq 8) \quad p_2(M) \neq 0 \quad (n \geq 16)$$

$p_i(M) \in H^{4i}(M; \mathbb{Z})$: i -ésima clase de Pontryagin

cubriente finito

IDEA: M se obtiene pegando piezas de $\hat{N} \xrightarrow{\text{cubriente finito}} N$, con $N =$ cierta variedad hiperbólica con $\pi_1(M)$ cubulable

GRACIAS !!!